



TITLE:

IdealのSaturationの問題について (ブール代数値の解析学と超準解析)

AUTHOR(S):

角田, 譲

CITATION:

角田, 譲. IdealのSaturationの問題について (ブール代数値の解析学と超準解析). 数理解析研究所講究録 1978, 336: 41-52

ISSUE DATE:

1978-10

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/104216>

RIGHT:

Ideal of saturation の問題について

神大 教養 角田 譲

κ は regular uncountable cardinal かつ I は κ の
 κ -complete non-principal ideal かつ I は κ の
 I を次の条件を満足する $\mathcal{P}(\kappa)$ の proper subset かつ I を

- (i) $\forall \xi < \kappa$ に對し $\{\xi\} \in I$,
- (ii) $A \subseteq \kappa, A \subseteq B \in I \rightarrow A \in I$,
- (iii) $A \in I, B \in I \rightarrow A \cup B \in I$,
- (iv) $\langle A_\xi : \xi < \zeta \rangle, \zeta < \kappa, A_\xi \in I (\forall \xi < \zeta)$
 $\rightarrow \bigcup_{\xi < \zeta} A_\xi \in I$.

Example 1. κ の subset A が κ に對し unbounded
 であるとは、 $\forall \xi < \kappa$ に對し $\xi < \zeta$ なる $\zeta \in A$ が存在
 する事である。 $A \subseteq \kappa$ が unbounded であるとは、 A は κ
 に對し bounded ではない。 κ の bounded subsets
 の全体は、 κ の κ -complete non-principal ideal

である。実際これは、 $\frac{\kappa}{\aleph_1}$ の κ の κ -complete non-principal ideal である。

Example 2. κ の subset K を κ に \aleph_1 2 closed \aleph_1 -id である。任意の limit ordinal $\alpha < \kappa$ に対して、 $\alpha \cap K$ を、 α に \aleph_1 2 unbounded \aleph_1 -id である。任意の $\alpha \in K$ である \aleph_1 -id である。 κ の subset S を stationary \aleph_1 -id である。任意の、 κ の closed unbounded set K に対して、 $K \cap S \neq \emptyset$ である \aleph_1 -id である。 κ の non-stationary set の全体は、 κ の \aleph_1 の κ -complete non-principal ideal である。

Example 3. κ を ineffable cardinal \aleph_1 -id である。次の条件を満足する事を示す。(Jensen)

$A_\alpha \subseteq \alpha$ を満足する任意の sequence $\langle A_\alpha; \alpha < \kappa \rangle$ に対して、 $\{\alpha < \kappa; \alpha \cap K = A_\alpha\}$ を stationary set である κ の subset K を存在する。

κ を ineffable cardinal である。 κ の subset B を ineffable \aleph_1 -id である。任意の sequence $\langle A_\alpha; \alpha \in B \rangle$ に対して、 $\{\alpha \in B; \alpha \cap A = A_\alpha\}$ を stationary である κ の subset A を存在する事を示す。 κ の non-ineffable subsets の全体は、 κ -complete non-principal ideal である。

$I \subseteq \kappa$ の \aleph_1 の κ -complete non-principal ideal である。

$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(K)$ を, I -disjoint 2-族 とは, $(\exists \mathcal{I})$ である,
 $A, B \in \mathcal{F}$ に対して, $A \cap B \in I$ か, 成立しないことを示す.

δ を, cardinal とする. I を, δ -saturated 2-族 と
 は, 任意の I -disjoint family $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(K) - I$ に対して
 常に, $|I| < \delta$ であることを示す.

I を, 2-saturated の時, I は prime κ -complete non-
 principal ideal とする.

Ideal + saturation の問題は, $\kappa < \aleph_1$ は, Tarski [] 等によ
 り研究されたが, post-Cohen により, Solovay,
 Kunen, Paris, Baumgartner 等により, 2種の, 結果が
 得られた. 最近, Prikry, Tschichowski により, singular
 cardinal problem と関連した結果が, 得られた.

(しかし, 今, 問題は, 依然として, 未解決である).

"non-stationary set の全体は κ の \aleph_1 の κ -complete
 non-principal ideal は, κ -saturated 2-族 だろうか?"

Solovay は, non-stationary set の全体は \aleph_1 の ideal
 が, nowhere κ -saturated, であることを示した. $(\exists \mathcal{I})$ stationary
 set の κ 個の disjoint な stationary set の分割を
 示す証明 (Solovay []).

Solovay の上の結果は, 次の 2つの lemma から, 示される.

役割を果す。

Lemma 1. $S \subseteq \kappa$, I は stationary set かつ $I \neq \emptyset$.

$S = \{\alpha < \kappa : \alpha \text{ は } S\text{-stationary}\}$ は stationary set である。

Lemma 2. I は normal κ -saturated ideal (on κ) かつ $I \neq \emptyset$. $S \subseteq \kappa$ stationary set かつ $I \neq \emptyset$. $\{\alpha < \kappa : \alpha \text{ は } S\text{-stationary}\}$ は I -measure one である。

2.2. Lemma 1, Lemma 2 の (1) は定義より。

$S \subseteq \kappa$, ordinals α の class かつ $I \neq \emptyset$, ordinal α は S -stationary である。 (1), $\text{cf}(\alpha) > \omega$, (2), $\alpha \in S$ ならば α は S の stationary set. $\alpha \in I$ ならば $\alpha \notin S$.

κ は κ -complete non-principal ideal I は normal である。 $I \neq \emptyset$, $A \subseteq \kappa$, $A \notin I$, $f: A \rightarrow \kappa$, $f(\alpha) < \alpha$, $\alpha \in A$, $\alpha \neq 0$ ならば $\bigcup_{\alpha \in A} f(\alpha) \in I$ かつ $\bigcup_{\alpha \in A} f(\alpha) < \kappa$ である。

Namba [] によると, Solovay の結果を用いて, 先に掲げた問題に答(2)の部分を解決している。

Theorem. κ は κ -saturated normal ideal であるならば, κ は κ -non-stationary set の κ -ideal である。

は K^+ -saturated である。

先に掲げた問題の解を, approach 17. ideal 全体 \mathcal{P} に対して代わる指法に着目する事に致す。①を以後, K 上, non-stationary set 全体 \mathcal{P} (7d normal ideal, $1 \in$ improper ideal, i.e., $1 = P(K) \in \mathcal{P}$), ①を \uparrow する ideal の全体 \mathcal{P} 集合を \mathcal{P} とする。 $I, J \in \mathcal{P}$ に対して, $I \leq J$ は, $I \subseteq J$ を意味する。 \mathcal{P} 上, $\langle \mathcal{P}; \leq \rangle$ は, 順序集合となる。実際, pseudo-Boolean algebra となる。 \mathcal{P} 上に次の事は, $I \wedge J, I \vee J$ を次の様に定義すれば良い。

$$I \wedge J = I \cap J,$$

$$I \vee J = \{A \cup B; A \in I, B \in J\}.$$

pseudo-complement に対しては, $I \Rightarrow J$ を, 次の様に定義すれば良い。

$$I \Rightarrow J = \{A \subseteq K; I \leq J \cap A\}.$$

但し, ②②, $J \cap A = \{B \subseteq K; A \cap B \in J\}$ とする。

これに, $-I$ は, $I \Rightarrow 0$ と定義する。 $I \neq \emptyset$, P の dense element, である。 $-I = 0$ になる必要十分条件は, $I \leq 0 \cap A$ なる stationary set A が存在しないことである。

③②, \mathcal{P}_{K^+} は, K 上, normal ideals の全体である。

但し, ③②, improper ideal $1 \in \mathcal{P}$ なる normal ideal である。

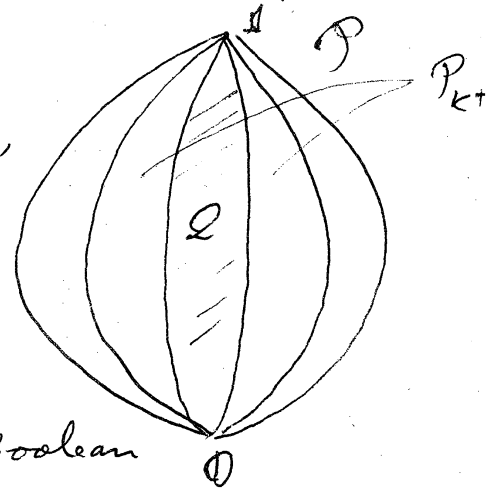
4.11. P_{k+} is a subalgebra of \mathcal{P} .

次に, $\mathcal{O} \cap A$ は \mathcal{P} の ideal かつ $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{O} \cap A$ かつ, \mathcal{P} は \mathcal{Q} の subalgebra である. 従って, \mathcal{Q} は $[\mathcal{A}]$ 上の $\mathcal{O} \cap (-A)$ を含む \mathcal{P} の quotient algebra $\mathcal{P}(\mathcal{O})/\mathcal{O}$ の ideal である. 故に $[\mathcal{A}]$ は, $A \subseteq \kappa$ の equivalence class modulo \mathcal{O} を含む.

4.12. \mathcal{P} は infinite join, meet を持つ.

$(I_\lambda : \lambda \in \Lambda) \subseteq \mathcal{I}_\lambda \in \mathcal{P}$ かつ,

1) $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda \in \mathcal{P}$ である.



4.13. \mathcal{P} is complete pseudo-Boolean algebra of κ . 4.14. infinite join $\bigvee_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$, infinite meet $\bigwedge_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ は \mathcal{P} の元である. 1) 4.15. \mathcal{P}_{k+} は complete pseudo-Boolean algebra of κ . 4.16. infinite join $\bigvee_{\lambda \in \Lambda}^{k+} I_\lambda$ は \mathcal{P}_{k+} の元である. (infinite meet $\bigwedge_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda = \bigwedge_{\lambda \in \Lambda}^{k+} I_\lambda$ は \mathcal{P}_{k+} の元である). 4.17. $\bigvee_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda \leq \bigvee_{\lambda \in \Lambda}^{k+} I_\lambda$ である.

4.18. \mathcal{P} の regular element $a \in \mathcal{P}$ は, $a \wedge b = a$ である. (\mathcal{P} の regular element である. $-- I = I$ である.)

$I \Rightarrow J$ に対し $J \in \mathcal{P}_{K+}$ 2- \mathcal{A} である。 $I \Rightarrow J \in \mathcal{P}_{K+}$ と
 なる I, J . $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}_{K+}$ 2- \mathcal{A} である。 \mathcal{Q} は
 Boolean 2- \mathcal{A} の $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{R}$ 2- \mathcal{A} \mathcal{R} 一般に \mathcal{P} の
 subalgebra である。 \mathcal{R} は \cap operation による 2
 Boolean algebra である。

$$I \vee^* J = \neg \neg (I \vee J)$$

$$I \wedge^* J = I \wedge J$$

$$\neg I = \neg \neg I$$

\mathcal{R} は 2. complete Boolean algebra である。 実際 \mathcal{R} は
 2. minimal completion である。 \mathcal{R} は infinite join,
 meet による。

$$\bigvee_{t \in T}^* I_t = \neg \neg \bigvee_{t \in T} I_t.$$

$$\bigwedge_{t \in T}^* I_t = \bigwedge_{t \in T} I_t$$

2- \mathcal{A} である。

$\langle I_t : t \in T \rangle \in \mathcal{P}_{K+}$, $t \in T$ なる I_t である。

Lemma 3. $A \in \bigvee_{t \in T}^{K+} I_t$ になるための必要十分条件は,
 2. 条件を満足する $T_0 \subseteq T$ と, $(A_t)_{t \in T_0}$ が存在すること
 である。

$$i) |T_0| \leq \kappa$$

$$ii) (\forall t \in T_0) (A_t \in I_t)$$

$$ii) (\forall t \in T - T_0) (A_t = \emptyset)$$

$$iv) \quad \bigoplus A = \bigvee_{t \in T}^* (\bigoplus A_t)$$

(17) $\therefore \textcircled{1} A = \textcircled{1} (-A) \quad 2-5d$

Theorem 29 (a) - (d) is, [6 2-8]

(2) ① if K^+ saturated 2-Ed

(b) $Q = \mathcal{P}_{K+}$

(c) P_{K^+} a dense element (f. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 38. 39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49. 50. 51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. 58. 59. 60. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 67. 68. 69. 70. 71. 72. 73. 74. 75. 76. 77. 78. 79. 80. 81. 82. 83. 84. 85. 86. 87. 88. 89. 90. 91. 92. 93. 94. 95. 96. 97. 98. 99. 100. 101. 102. 103. 104. 105. 106. 107. 108. 109. 110. 111. 112. 113. 114. 115. 116. 117. 118. 119. 120. 121. 122. 123. 124. 125. 126. 127. 128. 129. 130. 131. 132. 133. 134. 135. 136. 137. 138. 139. 140. 141. 142. 143. 144. 145. 146. 147. 148. 149. 150. 151. 152. 153. 154. 155. 156. 157. 158. 159. 160. 161. 162. 163. 164. 165. 166. 167. 168. 169. 170. 171. 172. 173. 174. 175. 176. 177. 178. 179. 180. 181. 182. 183. 184. 185. 186. 187. 188. 189. 190. 191. 192. 193. 194. 195. 196. 197. 198. 199. 200. 201. 202. 203. 204. 205. 206. 207. 208. 209. 210. 211. 212. 213. 214. 215. 216. 217. 218. 219. 220. 221. 222. 223. 224. 225. 226. 227. 228. 229. 230. 231. 232. 233. 234. 235. 236. 237. 238. 239. 240. 241. 242. 243. 244. 245. 246. 247. 248. 249. 250. 251. 252. 253. 254. 255. 256. 257. 258. 259. 260. 261. 262. 263. 264. 265. 266. 267. 268. 269. 270. 271. 272. 273. 274. 275. 276. 277. 278. 279. 280. 281. 282. 283. 284. 285. 286. 287. 288. 289. 290. 291. 292. 293. 294. 295. 296. 297. 298. 299. 300. 301. 302. 303. 304. 305. 306. 307. 308. 309. 310. 311. 312. 313. 314. 315. 316. 317. 318. 319. 320. 321. 322. 323. 324. 325. 326. 327. 328. 329. 330. 331. 332. 333. 334. 335. 336. 337. 338. 339. 340. 341. 342. 343. 344. 345. 346. 347. 348. 349. 350. 351. 352. 353. 354. 355. 356. 357. 358. 359. 360. 361. 362. 363. 364. 365. 366. 367. 368. 369. 370. 371. 372. 373. 374. 375. 376. 377. 378. 379. 380. 381. 382. 383. 384. 385. 386. 387. 388. 389. 390. 391. 392. 393. 394. 395. 396. 397. 398. 399. 400. 401. 402. 403. 404. 405. 406. 407. 408. 409. 410. 411. 412. 413. 414. 415. 416. 417. 418. 419. 420. 421. 422. 423. 424. 425. 426. 427. 428. 429. 430. 431. 432. 433. 434. 435. 436. 437. 438. 439. 440. 441. 442. 443. 444. 445. 446. 447. 448. 449. 450. 451. 452. 453. 454. 455. 456. 457. 458. 459. 460. 461. 462. 463. 464. 465. 466. 467. 468. 469. 470. 471. 472. 473. 474. 475. 476. 477. 478. 479. 480. 481. 482. 483. 484. 485. 486. 487. 488. 489. 490. 491. 492. 493. 494. 495. 496. 497. 498. 499. 500. 501. 502. 503. 504. 505. 506. 507. 508. 509. 510. 511. 512. 513. 514. 515. 516. 517. 518. 519. 520. 521. 522. 523. 524. 525. 526. 527. 528. 529. 530. 531. 532. 533. 534. 535. 536. 537. 538. 539. 540. 541. 542. 543. 544. 545. 546. 547. 548. 549. 550. 551. 552. 553. 554. 555. 556. 557. 558. 559. 560. 561. 562. 563. 564. 565. 566. 567. 568. 569. 570. 571. 572. 573. 574. 575. 576. 577. 578. 579. 580. 581. 582. 583. 584. 585. 586. 587. 588. 589. 590. 591. 592. 593. 594. 595. 596. 597. 598. 599. 600. 601. 602. 603. 604. 605. 606. 607. 608. 609. 610. 611. 612. 613. 614. 615. 616. 617. 618. 619. 620. 621. 622. 623. 624. 625. 626. 627. 628. 629. 630. 631. 632. 633. 634. 635. 636. 637. 638. 639. 640. 641. 642. 643. 644. 645. 646. 647. 648. 649. 650. 651. 652. 653. 654. 655. 656. 657. 658. 659. 660. 661. 662. 663. 664. 665. 666. 667. 668. 669. 670. 671. 672. 673. 674. 675. 676. 677. 678. 679. 680. 681. 682. 683. 684. 685. 686. 687. 688. 689. 690. 691. 692. 693. 694. 695. 696. 697. 698. 699. 700. 701. 702. 703. 704. 705. 706. 707. 708. 709. 710. 711. 712. 713. 714. 715. 716. 717. 718. 719. 720. 721. 722. 723. 724. 725. 726. 727. 728. 729. 730. 731. 732. 733. 734. 735. 736. 737. 738. 739. 740. 741. 742. 743. 744. 745. 746. 747. 748. 749. 750. 751. 752. 753. 754. 755. 756. 757. 758. 759. 760. 761. 762. 763. 764. 765. 766. 767. 768. 769. 770. 771. 772. 773. 774. 775. 776. 777. 778. 779. 780. 781. 782. 783. 784. 785. 786. 787. 788. 789. 790. 791. 792. 793. 794. 795. 796. 797. 798. 799. 800. 801. 802. 803. 804. 805. 806. 807. 808. 809. 810. 811. 812. 813. 814. 815. 816. 817. 818. 819. 820. 821. 822. 823. 824. 825. 826. 827. 828. 829. 830. 831. 832. 833. 834. 835. 836. 837

(d) P_K is Boolean algebra $\iff \exists$

(Proof). (2) \Rightarrow (1) の \exists は証明済み $\vdash B \vdash \dots$. $\exists \mathcal{Q} \in K^+ \text{-sat}$ -
urated とする. \exists . $I \in P_K \text{ s.t.}$, $(\exists \mathcal{Q} \in A \subseteq K \text{ について})$,
 $I \neq \mathcal{Q} \upharpoonright A$ とする. $\exists \mathcal{Q}$. $\mathcal{Q} \in K$ の maximal family とする

$$c) A \notin \emptyset, A \in I, (\forall A \in \mathcal{F})$$

22) F is \mathbb{Q} -disjoint

7. 存在に對し (27. Zorn, 補題 + 閉じた α).

① 1st, κ is saturated 2-EXS iff γ , $|X| \leq \kappa$ and $\forall \lambda$, $(A_\beta)_{\beta < \lambda} \in \mathcal{F}$ a enumeration of \mathcal{F} . $I = \{\alpha < \kappa; (\forall \beta < \alpha)(\alpha \notin A_\beta)\}$
 and $\lambda < \kappa$, I is normal 2-EXS iff γ , A is I -measure one

を持つ。しかし、仮定により、 $I \neq \mathbb{Q}1A$ である。以上より、

$I \supseteq \mathbb{Q}1A$ であるから、 $B \in I$, $B \neq \mathbb{Q}1A$ ならば B が存在する。

ゆえに、 $B \cap A \in I$, $B \cap A \neq \mathbb{Q}$ である。 \mathcal{F} の maximality に

より、 $B \cap A \cap A_\beta \neq \mathbb{Q}$ ならば $\beta < \kappa$ である。従って、

$A \cap A_\beta \subseteq \{\alpha < \kappa; \alpha \leq \beta\}$ であるから、 $A \cap A_\beta$ は \mathbb{Q} -measure zero である。ゆえに、 $B \cap A \cap A_\beta \neq \mathbb{Q}$ には反する。

逆に、 \mathbb{Q} の κ^+ -saturated であることと仮定する。この時、

$A_\beta \cap A_\gamma \in \mathbb{Q}$, $\beta < \gamma < \kappa^+$ ならば $\{A_\beta; \beta < \kappa^+\} \subseteq \mathcal{P}(\kappa) - \mathbb{Q}$ が成り立つ。 $J = \bigvee_{\beta < \kappa^+}^{\kappa^+} (\mathbb{Q}1A_\beta)$ とおく。しかし、

$\mathcal{Q} = \mathcal{P}_{\kappa^+}$ であるから、 $J = \mathbb{Q}1A$ ならば $A \subseteq \kappa$ が成り立つ。

Lemma 3. により、 $T \subseteq \kappa^+$ と、 $(B_\beta)_{\beta < \kappa^+}$ が成り立つ

$$i) |T| \leq \kappa,$$

$$ii) B_\beta \in \mathbb{Q}1A_\beta, \quad \forall \beta < \kappa^+.$$

$$iii) D_\beta = \emptyset, \quad \forall \beta \in \kappa^+ - T$$

$$iv) \mathbb{Q}1A = \bigvee_{\beta < \kappa^+}^* (\mathbb{Q}1B_\beta).$$

$|T| \leq \kappa$ であるから、 $\beta \in \kappa^+ - T$ ならば β が存在する。 $\mathbb{Q}1A_\beta$

$\leq J = \mathbb{Q}1A$ であるから、 $\mathbb{Q}1A_\beta = \bigvee_{\beta < \kappa^+}^* (\mathbb{Q}1B_\beta) \wedge (\mathbb{Q}1A_\beta)$

$\beta \in \kappa^+ - T$ に対しては、 $\mathbb{Q}1B_\beta = \emptyset$, ゆえに、 $(\mathbb{Q}1B_\beta) \wedge$

$(\mathbb{Q}1A_\beta) = \mathbb{Q}$. $\beta \in T$ に対しては、 $\beta \neq \gamma$ であるから、

$(\mathbb{Q}1B_\beta) \wedge (\mathbb{Q}1A_\beta) \leq (\mathbb{Q}1A_\beta) \wedge (\mathbb{Q}1A_\beta) = \mathbb{Q}$. ゆえに、

$(\mathbb{Q}1B_\beta) \wedge (\mathbb{Q}1A_\beta) = \mathbb{Q}$, $\forall \beta < \kappa^+$ である。

Lévy [], Baumgartner [] 12502 22-#00
 #10 2002

$\{A \subseteq \kappa; A \text{ is } \Pi_1^1\text{-indescribable } 2\text{-b.c.}\}$ is,
 κ is, Π_1^1 -indescribable 2-b.c.; κ is a normal ideal
 $\subseteq \mathcal{I}_b$, \mathcal{I}_b , \mathcal{I}_b is, non-stationary ideal $\subseteq \mathcal{I}_b$ 2,
 dense $\subseteq \mathcal{I}_b$, \mathcal{I}_b is, \mathcal{I}_b is, \mathcal{I}_b is, \mathcal{I}_b is.

系. $K \sim$, Π_1 - indescribable 2- & 4. 17: $K \cap$
 E a non-stationary ideal 17 K^\perp -saturated 2. 12. 11.

\aleph_1 is a κ -ineffable cardinal $\aleph_1 \nVdash \text{CH}$,
 \aleph_1 is a non-stationary ideal \aleph_1 is κ^+ -saturated \aleph_1 .
 \aleph_1 is a κ -ineffable cardinal $\aleph_1 \nVdash \text{CH}$. $V = L[J]$ (where L , J is a
measurable cardinal \aleph_1 is a σ -complete non-principal
prime ideal) $\aleph_1 \nVdash \text{CH}$: non-stationary sets \aleph_1
is a normal ideal \aleph_1 is κ^+ -saturated \aleph_1 is a σ -ideal.

定理 (Jensen, Devlin). \aleph_1 不可数 $\Rightarrow V = L[J]$ 对某 $\alpha \in \aleph_1$, \aleph_1 不可数 \Rightarrow \aleph_1 不可数 \Rightarrow \aleph_1 不可数

上、定理17. 我々に次の問題を提起する.

"Non-stationary sets on κ , a normal ideal \mathcal{I} , κ^+ -saturated \mathcal{I} is a regular uncountable cardinal κ の存在より, \mathcal{I}^+ の存在 \mathcal{I} であるか?"

上問題に答へる, 又, 事は知られてゐる.

定理 (Kunen) successor cardinal κ 上 \mathcal{I} に, κ^+ -saturated non-trivial ideal \mathcal{I} の存在 \mathcal{I} は: \mathcal{I}^+ の存在 \mathcal{I} である.

上の定理より, 問題は, limit cardinal の時に成るか, 否か. 又, large cardinal \mathcal{I} は, limit cardinal の時に問題となる.